

Dans cette séance on va voir

21.11

- diagonalisation dans le cas complexe *

- la notion de norme euclidienne, produit scalaire euclidien, orthogonalité, ...

↑ NOUVELLE PARTIE

La théorie de valeurs propres et vecteurs propres pour $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$ est essentiellement la même $\rightarrow$ elle permet de faire plus de calculs $\mathbb{R} \rightarrow$ on peut calculer de racines de polynômes dans $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$!!!

[Exemple]

Soit $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Calculer les valeurs propres, vecteurs propres dans $\mathbb{C}$ et montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (pas dans $\mathbb{R}$!).

① Pour les vl. propres $\xrightarrow{\text{racines de}}$ $P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 - \lambda \end{pmatrix}$

racines de $P_A(\lambda)$:

$$\lambda = 2$$

$$\lambda = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$= (2 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2 - \lambda) \left[\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right]$$

$$= (2 - \lambda) (\lambda^2 - \lambda + 1)$$

② Calcul de vecteurs propres

$$\overrightarrow{F}_2 = \text{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} \right\}, \quad \overrightarrow{F}_{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \text{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3} \right\}$$

$$\vec{v}_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exprimer

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

↑ diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -i/2 & 0 & 1/2 \\ i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

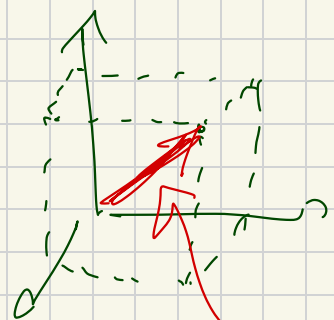
calcul
avec
G-J

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Chapitre 12

Produit scalaire euclidien

Def. 12.1 (norme euclidienne)



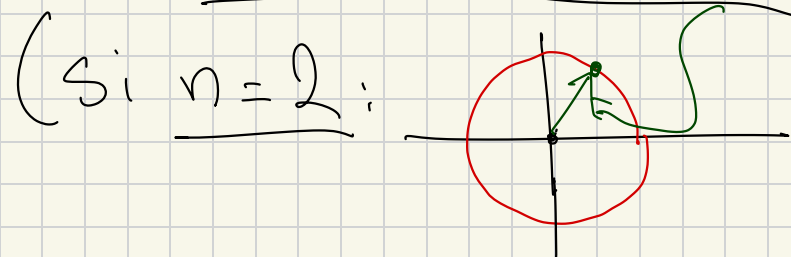
= longueur d'un
vecteur

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

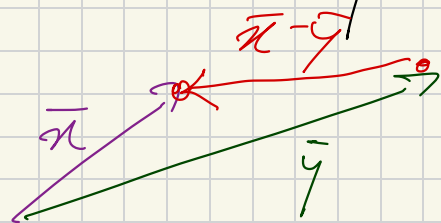
→ Vecteur normalisé

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|\vec{x}\| = 1$$



Def. 12.3 (distance) F.d. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, la distance

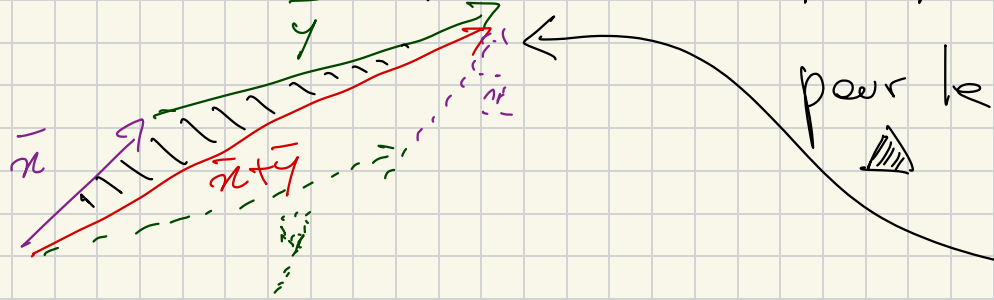
entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$ est



$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) := \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

(PROP) (Nor.1) $\| \lambda \cdot \vec{x} \| = |\lambda| \cdot \| \vec{x} \|, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$
 (Nor.2) $\| \vec{x} \| \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\| \vec{x} \| = 0$ ss: $\vec{x} = \vec{0}$
 (Prop.13) (Nor.3) $\| \vec{x} + \vec{y} \| \leq \| \vec{x} \| + \| \vec{y} \|, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ (inég. triangulaire)



pour le

Déf. 12.6 (produit scalaire euclidien)

En fait

angle entre
 $\vec{x}$ et $\vec{y}$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \| \vec{x} \| \cdot \| \vec{y} \| \cdot \cos(\theta)$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$= (x_1 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \vec{x}^T \cdot \vec{y}$$

produit de matrices

Déf. Deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux
 (ou perpendiculaires) si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

Notation: $\vec{x} \perp \vec{y}$

PROPRIÉTÉS DU PRODUIT SCALAIRE (Prop. 14)

$$(PS.1) \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x} \quad (\text{symétrie})$$

$$(PS.2) \quad \left. \begin{aligned} (\vec{x} + \lambda \vec{x}') \cdot \vec{y} &= \vec{x} \cdot \vec{y} + \lambda \vec{x}' \cdot \vec{y} \\ \vec{x} \cdot (\vec{y} + \lambda \vec{y}') &= \vec{x} \cdot \vec{y} + \lambda \vec{x} \cdot \vec{y}' \end{aligned} \right\} (\text{bilinearité})$$

$$(PS.3) \quad \vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0 \quad \text{et} \quad \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \text{ ssi } \vec{x} = \vec{0}$$

$$(NRM) \quad \|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} \quad (\text{ou } \|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x})$$

$$(CS) \quad |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \quad \hookrightarrow \text{inégalité de Cauchy-Schwarz}$$

← "même" que (Nor.3)

But: preuve de (CS) $t \in \mathbb{R}, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$0 \leq \|\vec{x} + t\vec{y}\|^2 \quad \hookrightarrow \text{voir les notes manuscrites.}$$